

Klassenstufe 10  
**Geometrie**

**Körperberechnungen**

**Teil 2**

---

**Sammlung von Aufgaben  
mit Verwendung trigonometrischer Funktionen**

Aufgaben 51 bis 55

mit ausführlichen Lösungen

- Die Sammlung wird fortgesetzt

Datei Nr. 11625

Stand: 28. Mai 2008

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

[www.mathe-cd.de](http://www.mathe-cd.de)

## ***Hinweis***

Alle Ergebnisse sind sinnvoll gerundet und in der Regel auf drei geltende Ziffern anzugeben.

Das heißt statt 3 cm schreibt man dann 3,00 cm und statt 24 cm 24,0 cm. Die Zahlen 10 bis 14 behandelt man dann noch wie einstellig, d. h. 11,2 cm sieht man als auf 2 Ziffern gerundet an und sollte 11,20 cm schreiben.

Demo: Mathe-CD

## Aufgabe 53

- a) Ein Werkstück besteht aus einem Zylinder mit zwei aufgesetzten gleich großen Kegelstümpfen.

Es hat diese Maße:

$$r_1 = 0,55 \text{ cm}, \quad r_2 = 2,20 \text{ cm}, \\ h = 7,70 \text{ cm} \quad \text{und} \quad \alpha = 45^\circ.$$

Berechne die Oberfläche  $O$  des Werkstücks.

- b) Ein anderes Werkstück besitzt ein Volumen von  $311 \text{ cm}^3$ .

Ferner sind bekannt

$$r_1 = 2,25 \text{ cm}, \quad h_1 = 7,00 \text{ cm} \quad \text{und} \\ h_2 = 2,80 \text{ cm}.$$

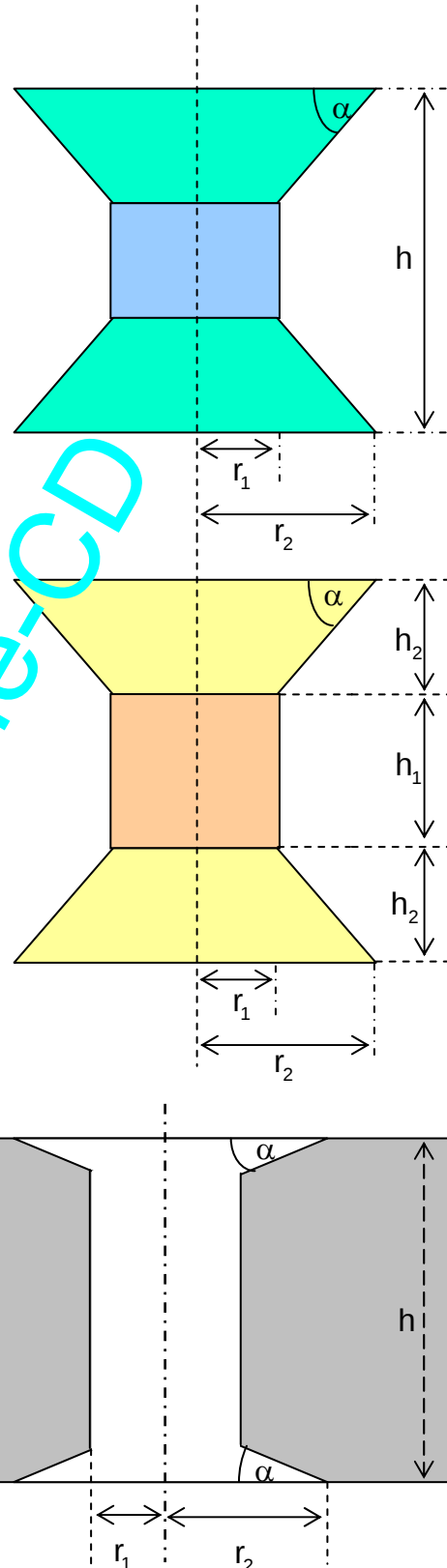
Berechne  $r_2$ .

- c) Eine Aluminiumplatte von  $h = 12,0 \text{ cm}$  Dicke wird nach nebenstehender Skizze durchbohrt und ausgefräst. Dabei sind  $r_1 = 3,0 \text{ cm}$  und  $r_2 = 6,0 \text{ cm}$ .

Zeige, dass das Volumen des entstandenen Hohlraums in Abhängigkeit von  $\alpha$  nach der Formel

$$V = 36\pi \cdot (3 + 2 \cdot \tan \alpha)$$

berechnet werden kann.



### Lösung 53

- a) Gegeben sind  $r_1 = 0,55 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 2,20 \text{ cm}$ ,  
 $h = 7,70 \text{ cm}$  und  $\alpha = 45^\circ$ .

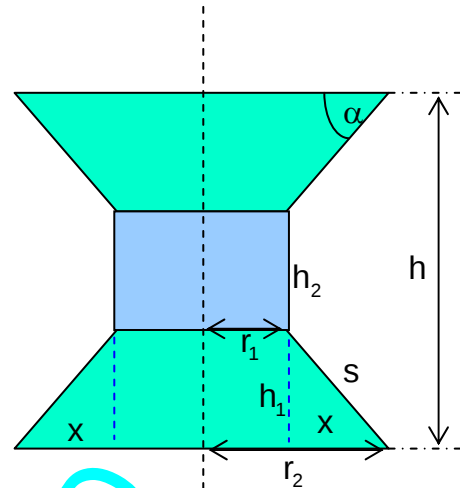
Berechnung der **Mantellinie** s:

Zunächst gilt:

$$x = r_2 - r_1 = 1,65 \text{ cm}$$

Wegen  $\alpha = 45^\circ$  folgt  $h_1 = x = 1,65 \text{ cm}$   
 und nach Pythagoras weiter:

$$s^2 = h_1^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow s = x\sqrt{2} = 2,33 \text{ cm}$$



Die **Mantelfläche eines Kegelstumpfes** wird durch diese Formel berechnet:

$$M_{\text{KSt}} = \pi s (r_1 + r_2) \approx \pi \cdot 2,33 \cdot (0,55 + 2,20) \text{ cm}^2 \approx 20,1 \text{ cm}^2$$

Berechnung der **Höhe des Zylinders**:

$$h_2 = h - 2 \cdot h_1 = (7,70 - 2 \cdot 1,65) \text{ cm} = 4,4 \text{ cm}$$

Der **Zylindermantel** kann durch geeignetes Aufschneiden zu einem Rechteck gemacht werden, dessen Länge der Umfang des Grundkreises ist:

$$M_{\text{Zyl}} = h_2 \cdot 2\pi r_1 = 15,2 \text{ cm}^2$$

Die Oberfläche des gesamten Werkstücks besteht nun aus den Mantelflächen des Zylinders und der beiden gleichen Kegelschümpfe plus den beiden Kreisflächen oben und unten:

$$A_{\text{Kreis}} = \pi r_2^2 \approx 15,2 \text{ cm}^2$$

**Oberfläche:**

$$O = M_{\text{Zyl}} + 2 \cdot M_{\text{KSt}} + 2 \cdot A_{\text{Kreis}} \approx (15,2 + 2 \cdot 20,1 + 2 \cdot 15,2) \text{ cm}^2 = 85,8 \text{ cm}^2$$

- b) Ein anderes Werkstück besitzt ein Volumen von  $311 \text{ cm}^3$ .  
 Ferner sind bekannt:  
 $r_1 = 2,25$ ,  $h_1 = 7,00 \text{ cm}$  und  
 $h_2 = 2,80 \text{ cm}$ .  
 Berechne  $r_2$ .

Da das Volumen bekannt ist, stellt man zuerst die Formel für dessen Berechnung auf:

$$V_{\text{KSt}} = \frac{1}{3} \pi h_2 (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V_{\text{Zyl}} = \pi r_1^2 \cdot h_1$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi h_2 (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \pi r_1^2 h_1$$

In dieser Formel ist  $r_2$  die einzige Unbekannte.

Wir setzen alle Werte ein, fassen zusammen und stellen die Gleichung um.

$$311 = \underbrace{\frac{2}{3} \pi \cdot 2,8}_{5,864} (2,25^2 + 2,25 \cdot r_2 + r_2^2) + \underbrace{\pi \cdot 2,25^2 \cdot 7}_{111,3}$$

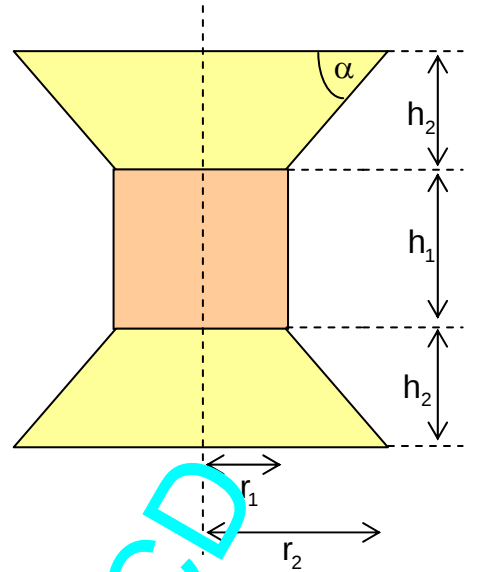
$$\frac{311 - 111,3}{5,864} = r_2^2 + 2,25 \cdot r_2 + 5,06$$

$$34,06 = r_2^2 + 2,25 \cdot r_2 + 5,06$$

$$r_2^2 + 2,25 \cdot r_2 - 29 = 0$$

$$r_2 = \frac{-2,25 \pm \sqrt{2,25^2 + 4 \cdot 29}}{2} = \frac{-2,25 \pm 11}{2} = \begin{cases} 4,38 \text{ (cm)} \\ < 0 \end{cases}$$

Der negative zweite Wert hat keine geometrische Bedeutung.

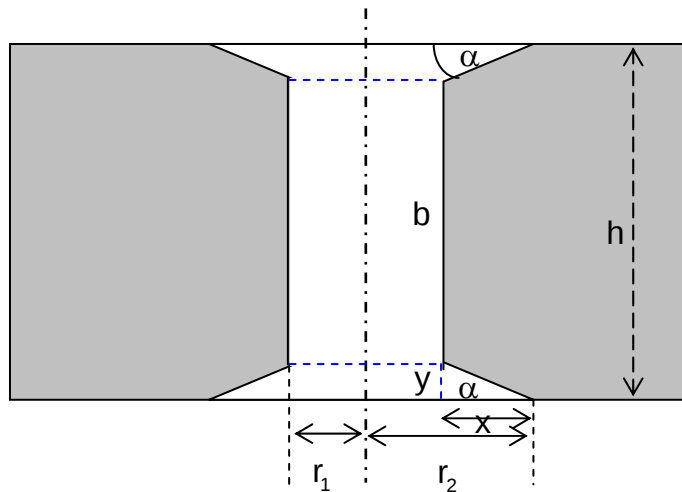


- c) Eine Aluminiumplatte von  $h = 12,0 \text{ cm}$  Dicke wird nach nebenstehender Skizze durchbohrt und ausgefräst. Dabei sind  $r_1 = 3,0 \text{ cm}$  und  $r_2 = 6,0 \text{ cm}$ .

Zeige, dass das Volumen des entstandenen Hohlraumes in Abhängigkeit von  $\alpha$  nach der Formel

$$V = 36\pi \cdot (3 + 2 \cdot \tan \alpha)$$

berechnet werden kann.



Die Formel wird so aufgebaut:

Der Hohlraum ist zusammengesetzt aus einem Zylinder und zwei Kegelstümpfen.

Zunächst berechnet man den Abschnitt  $x$  so:  $x = r_2 - r_1 = 3,0 \text{ cm}$

Dann folgt für die Höhe  $y$  des Kegelstumpfes (ab jetzt ohne Maßeinheiten):

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot \tan \alpha = 3 \cdot \tan \alpha$$

Damit erhält man die Höhe  $b$  des Zylinders:  $b = r_1 - 2y = h - 6 \cdot \tan \alpha = 12 - 6 \cdot \tan \alpha$

**Zylindervolumen:**  $V_{\text{Zyl}} = \pi r_1^2 \cdot b = \pi \cdot 9 \cdot (12 - 6 \cdot \tan \alpha)$

**Volumen eines Kegelstumpfes:**

$$V_{\text{KSt}} = \frac{1}{3} \pi y \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V_{\text{KSt}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 3 \cdot \tan \alpha \cdot (9 + 18 + 36) = 63 \pi \cdot \tan \alpha$$

**Gesamtvolumen:**  $V = V_{\text{Zyl}} + 2 \cdot V_{\text{KSt}} = \pi \cdot 9 \cdot (12 - 6 \cdot \tan \alpha) + 2 \cdot 63 \pi \cdot \tan \alpha$

$$V = 108\pi - 54\pi \cdot \tan \alpha + 126\pi \cdot \tan \alpha$$

$$V = 108\pi + 72\pi \cdot \tan \alpha = 36\pi \cdot (3 + 2 \cdot \tan \alpha)$$

was zu beweisen war.